

# Die Renormierung in der Statistischen Physik

Von R. Lipowsky, München\*)

*K. G. Wilson, der Physik-Nobelpreisträger von 1982, hat neue Methoden in die Statistische Physik eingeführt, die unter dem Begriff Renormierung zusammengefaßt werden. Was sind die Ideen der Renormierung? Wie sehen ihre Rechenmethoden aus? Welche Erfolge kann die Renormierung bisher verbuchen? Auf diese Fragen versucht der folgende Artikel eine Antwort zu geben.*

## 1. Einleitung und Übersicht

K. G. Wilson erhielt den Physik-Nobelpreis 1982 für seine Beiträge zur Theorie kritischer Phänomene [1]. Die bekanntesten derartigen Phänomene sind die kontinuierlichen Phasenübergänge oder Phasenübergänge 2. Art bzw. kritische Punkte wie z. B. der Curie-Punkt eines Ferromagneten oder der  $\lambda$ -Punkt von superflüssigem Helium. Die kritischen Punkte haben merkwürdige Eigenschaften: Z. B. werden verschiedene Materialkonstanten wie die spezifische Wärme oder die Suszeptibilität unendlich groß. Am erstaunlichsten ist jedoch, daß diese Eigenschaften weitgehend *universell* sind, d. h. man beobachtet an verschiedenen Phasenübergängen dasselbe Verhalten (Abschnitt 2). Die mikroskopischen Vorgänge, die dieses makroskopische Verhalten bestimmen, lassen sich an einem einfachen Modell für den Ferromagnetismus, dem sog. Ising-Modell, anschaulich beschreiben. Dabei wird deutlich, daß die kontinuierlichen Phasenübergänge durch eine spezielle Symmetrieeigenschaft, nämlich durch *Skaleninvarianz*, ausgezeichnet sind (Abschnitt 3).

In seinen Arbeiten [2] hat K. G. Wilson neuartige Methoden entwickelt, die für die theoretische Untersuchung von kontinuierlichen Phasenübergängen besonders gut geeignet sind. Diese Methoden wurden in den letzten zehn Jahren weiterentwickelt und auf eine Vielzahl von anderen kritischen Phänomenen angewendet. Man faßt sie unter dem Begriff *Renormierungsgruppe* oder kurz *Renormierung* zusammen.

\* Dr. Reinhard Lipowsky, Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 37/III, D-8000 München 2.

men. Die Renormierung ist vor allem auch eine *neue Denkweise*, die in diesem Aufsatz zunächst am Ising-Modell erläutert wird (Abschnitt 4). Die Ideen der Renormierung lassen sich auf verschiedene Weisen verwirklichen: Im Abschnitt 5 wird, wieder am Beispiel des Ising-Modells, gezeigt, welche Strategien der Renormierung bisher entwickelt wurden. Im Abschnitt 6 werden die Ergebnisse der Renormierung für einige kritische Phänomene beschrieben, und zum Schluß folgt ein kurzer Ausblick.

## 2. Kontinuierliche Phasenübergänge

Von wenigen Ausnahmen abgesehen, kommt jede Substanz in drei Aggregatzuständen vor: als Festkörper, Flüssigkeit und Gas. Allerdings reicht diese Einteilung noch nicht aus, um die verschiedenen Zustandsformen der Materie zu klassifizieren. Z. B. haben die meisten Substanzen verschiedene feste Phasen, die sich in ihrer Kristallstruktur, ihren magnetischen oder elektrischen Eigenschaften unterscheiden.

Die verschiedenen Phasen einer Substanz lassen sich durch Veränderung äußerer Parameter ineinander umwandeln. Dazu zwei einfache Beispiele: 1. Ob eine Substanz flüssig oder gasförmig ist, hängt von der Temperatur  $T$ , und vom Druck  $P$  ab. Bild 1a zeigt ein typisches  $(P, T)$ -Diagramm mit der Koexistenzkurve von flüssiger und gasförmiger Phase, also eine Dampfdruckkurve, die im kritischen Punkt bei der Temperatur  $T_c$  endet. Für Temperaturen oberhalb von  $T_c$  existiert nur noch eine einzige „fluide“ Phase. 2. In manchen Magneten zeigt die Magnetisierung parallel zu einer „leichten“ Kristallachse. Es gibt dann zwei ferromagnetische Phasen: In der einen zeigt die Magnetisierung „rauf“, in der anderen zeigt sie „runter“. Diese beiden Phasen koexistieren für Temperaturen unterhalb der Curie-Temperatur  $T_c$ , falls kein äußeres Magnetfeld  $H$  vorhanden ist (Bild 2a). Der Phasenübergang tritt wieder an der Koexistenzkurve auf, der kritische Endpunkt ist in diesem Fall durch den Curie-Punkt bei  $T_c$  gegeben. Für Temperaturen oberhalb von  $T_c$  ist der Kristall paramagnetisch.

Der Phasenübergang an den beiden Koexistenzkurven in Bild 1a und 2a ist – außer an den kritischen Punkten – diskontinuierlich. An der Koexistenzkurve von Flüssigkeit und Gas ändert sich die Dichte (Bild 1b), an der Koexistenzkurve des Magneten die Magnetisierung (Bild 2b) unstetig. Diese beiden Größen nennt man Ordnungsparameter. Bei Annäherung an den kritischen Punkt geht ihr Wert in beiden Systemen stetig gegen Null.

An den kritischen Endpunkten der Koexistenzkurven läuft der Phasenübergang kontinuierlich ab. Derartige Phasenumwandlungen sind in den letzten 40 Jahren sowohl experimentell als auch theoretisch sehr intensiv untersucht worden, und zwar aus mehreren Gründen [3, 4]:

1) Das Verschwinden des Ordnungsparameters folgt einem Potenzgesetz. Z. B. gilt für die Magnetisierung bei Annäherung an die Curie-Temperatur  $M \propto |T - T_c|^\beta$ . Die dimensionslose Zahl  $\beta$  wird als *kritischer Exponent* bezeichnet. Experimentell findet man  $\beta \approx 1/3$  für 3-dimensionale Magnete.

2) Am kritischen Punkt divergieren verschiedene Materialkonstanten wie die Kompressibilität einer Flüssigkeit oder die Suszeptibilität eines Magneten. Z. B. gilt für die Suszeptibilität  $\chi$  in der Nähe

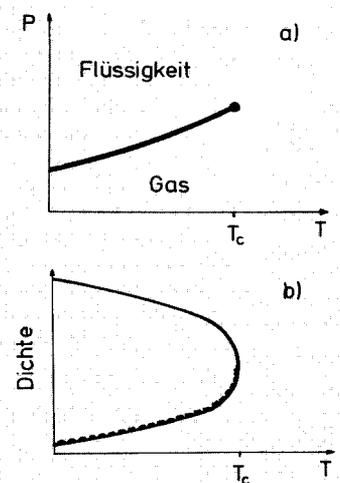


Bild 1: a) Koexistenzkurve der flüssigen und der gasförmigen Phase mit dem kritischen Punkt bei  $T_c$  ( $T$  = Temperatur,  $P$  = Druck); b) Dichte der Flüssigkeit (oberer Zweig) und des Gases (unterer Zweig) entlang der Koexistenzkurve in 1a).

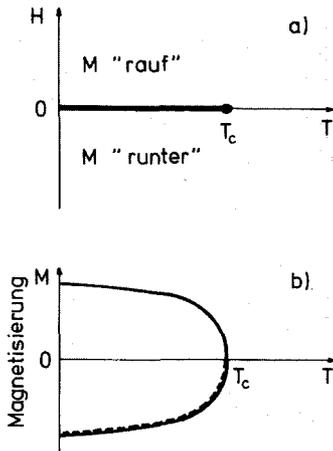


Bild 2: a) Koexistenzkurve zweier magnetischer Phasen mit entgegengesetzter Magnetisierung  $M$  ( $H =$  Magnetfeld). Diese Kurve beginnt bei  $H = 0$  und endet im Curie-Punkt bei  $T_c$ . b) Magnetisierung der beiden magnetischen Phasen entlang der Koexistenzkurve in 2a).

der Curie-Temperatur (für  $H = 0$ )  $\chi \propto |T - T_c|^{-\gamma}$ .  $\gamma$  ist ein weiterer kritischer Exponent. Experimente an 3-dimensionalen Magneten liefern  $\gamma \approx 1/4$ .

3) In der Streuung von Licht, Röntgen- und Neutronenstrahlen treten ebenfalls Anomalien auf. Die kritische Lichtstreuung an einem Flüssig/Gas-Übergang ist mit bloßem Auge zu erkennen: Eine Flüssigkeit, die für Temperaturen unterhalb von  $T_c$  klar und durchsichtig ist, wird bei  $T_c$  milchig trüb (kritische Opaleszenz). Diese Anomalien in der Streuung lassen sich ebenfalls durch kritische Exponenten charakterisieren.

4) Die kritischen Exponenten wurden an sehr vielen kontinuierlichen Phasenübergängen experimentell bestimmt. Dabei hat sich herausgestellt, daß diese Größen weitgehend *universell* sind, d. h. sie haben für verschiedene Phasenübergänge denselben Wert. Diese Universalität bezieht sich einmal auf Phasenübergänge desselben Typs in verschiedenen Substanzen, sie umfaßt aber auch verschiedenartige Phasenübergänge: Z. B. findet man an den kontinuierlichen Ordnungs/Unord-

nungs-Übergängen in binären Legierungen (wie CuZn) und an den kontinuierlichen Phasenübergängen von einachsigen Antiferromagneten (wie  $\text{CoCs}_2\text{Cl}_3$ ) dieselben Exponenten wie an den kritischen Flüssig/Gas-Übergängen. Dennoch sind die kritischen Exponenten nicht völlig universell, sie hängen insbesondere von der Raumdimension des physikalischen Systems ab. Diese Beobachtungen haben zu der Vermutung geführt, daß man alle kontinuierlichen Phasenübergänge systematisch in Universalitätsklassen einteilen kann (Universalitätshypothese).

### 3. Ising-Modell

Die mikroskopischen Vorgänge, die den makroskopischen Eigenschaften am kritischen Punkt zugrunde liegen, lassen sich am Ising-Modell für den Ferromagnetismus studieren. Ein Ferromagnet ist aus Gitteratomen aufgebaut, die ein permanentes magnetisches Dipolmoment besitzen. Diese sind aufgrund des Pauli-Prinzips über die Austauschwechselwirkung gekoppelt. Sie bewirkt, daß die parallele Ausrichtung zweier Nachbardipole energetisch bevorzugt ist.

Im Ising-Modell werden die magnetischen Dipole durch Spins ersetzt, die nur „rauf“ oder „runter“ zeigen können: Auf jedem Platz  $i$  des Modellgitters sitzt ein Spin  $\sigma_i$ , der die beiden Werte  $\pm 1$  annehmen kann. Falls kein äußeres Magnetfeld vorhanden ist, ist die Energie einer Spin-Konfiguration  $\{\sigma\}$  durch

$$E\{\sigma\} = - \sum J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

gegeben. Dabei koppeln die positiven Austauschwechselwirkungen  $J_{ij}$  nur Spins auf benachbarten Gitterplätzen  $i$  und  $j$ .

In einem Ferromagneten ändert sich die Spin-Konfiguration sehr schnell, weil die einzelnen Spins aufgrund der thermischen Bewegung der Atome und Elektronen „umklappen“. Für einen makroskopischen Magneten gibt es unvorstellbar viele Spin-Konfigurationen: Bei  $10^{23}$  Spins sind es 2 hoch  $10^{23}$  Möglichkeiten! Allerdings treten vor allem die Spin-Konfigurationen auf, deren Energie mit der thermischen Anregungsenergie  $k_B T$  (Boltzmann-Konstante  $\times$  Temperatur) vergleichbar ist. Die Wahrscheinlichkeit für eine Konfiguration  $\{\sigma\}$  ist nämlich durch den Boltzmann-Faktor

$$W\{\sigma\} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} E\{\sigma\}\right)$$

gegeben, der mit der Zustandssumme

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} E\{\sigma\}\right) \quad (1)$$

auf Eins normiert ist.

Der Boltzmann-Faktor  $W\{\sigma\}$  hängt nur von der Parameterkombination  $J_{ij}/(k_B T)$  ab. Es ist deshalb zweckmäßig, die *reduzierten Kopplungen*  $K_{ij} = J_{ij}/(k_B T)$  einzuführen, die das Verhalten des Spinsystems vollständig bestimmen. Man beachte, daß diese Kopplungen umgekehrt proportional zur Temperatur sind. Bild 3 zeigt als Beispiel ein 2-dimensionales Ising-Modell mit Gitterkonstante  $a$ , dessen Nachbar-spins in  $x$ -Richtung mit  $K_x = J_x/(k_B T)$  und in  $y$ -Richtung mit  $K_y = J_y/(k_B T)$  wechselwirken.

Die Magnetisierung  $M$  ist im Ising-Modell durch den thermischen Mittelwert eines Spins auf einem beliebigen Gitterplatz  $n$  gegeben:

$$M = \langle \sigma_n \rangle = \sum_{\{\sigma\}} W\{\sigma\} \sigma_n$$

Wie verhält sich dieser Mittelwert als Funktion der Temperatur? Für sehr tiefe Temperaturen sind die Spinkopplungen  $K_{ij}$  sehr groß, und jeder Spin nimmt denselben Wert an wie seine Nachbarn. Es gibt nur zwei mögliche Spinkonfigurationen: Entweder alle Spins „rauf“ oder alle Spins „runter“. Deshalb hat die Magnetisierung für tiefe Temperaturen den Wert  $M = \langle \sigma_n \rangle = \pm 1$  (vgl. Bild 2b). Für  $T = 0$  liegt also ein völlig geordneter Zustand vor. Diese Ordnung nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Bei einer kritischen Temperatur  $T_c$  verschwindet die Magnetisierung schließlich: Für  $T \geq T_c$  zeigt jeder Spin mit derselben Wahrscheinlichkeit „rauf“ oder „runter“, und deshalb gilt  $M = \langle \sigma_n \rangle = 0$ .

Das Verschwinden des Ordnungsparameters ist ein Aspekt des kritischen Punktes. Um zu verstehen, wie die Divergenzen in den Materialkonstanten und die Anomalien in der Streuung mikroskopisch zustande kommen, muß man die Fluktuationen  $\Delta\sigma_i = \sigma_i - \langle \sigma_i \rangle$  der Spins um ihren Mittelwert betrachten. Diese Fluktuationen sind nämlich nicht völlig zufällig, sondern sie erzeugen Cluster von korrelierten „rauf“- oder „runter“-Spins. Für Temperaturen weit unterhalb oder weit oberhalb von  $T_c$  bestehen diese Cluster nur aus wenigen Spins. Bei Annäherung an  $T_c$  wachsen sie jedoch beträchtlich an. Die kleinen „rauf“-Cluster befinden sich dann in größeren „runter“-Clustern, die in noch größeren „rauf“-Clustern enthalten sind, die .... Die Ausdehnung der größten Spincluster ist durch die sog. *Korrelationslänge*  $\xi$  gegeben. Diese Länge divergiert bei Annäherung an den kritischen Punkt wie

$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu}$$

mit dem kritischen Exponenten  $\nu$ . Dieses Anwachsen der korrelierten Spincluster bewirkt die Anomalien der kritischen

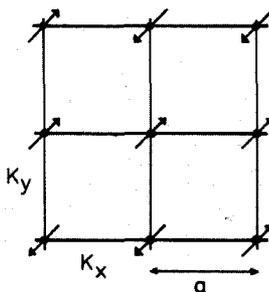


Bild 3: 2-dimensionales Ising-Modell mit den Kopplungen  $K_x$ ,  $K_y$ , und der Gitterkonstante  $a$ . Die Spins sind durch die Pfeile auf den Kreuzungspunkten des Gitters dargestellt.

Streuung (bei einer Flüssigkeit entsprechen die „rauf“-Cluster kleinen Gasblasen und die „runter“-Cluster kleinen Flüssigkeitstropfen). Direkt am kritischen Punkt ist die Korrelationslänge unendlich groß. Dann gibt es korrelierte Spincluster auf jeder Längenskala. Anschaulich ausgedrückt: Wenn man das Spinsystem am kritischen Punkt durch ein Zoom-Objektiv betrachtet, dann sieht man für alle Brennweiten ( $\gg$  Gitterkonstante) das gleiche Bild. Die Veränderung der Brennweite entspricht einer Transformation der Längenskala. Das System befindet sich deshalb am kritischen Punkt in einem *skaleninvarianten* Zustand.

Diese anschauliche Vorstellung läßt sich präzisieren, wenn man die Korrelationsfunktion  $C(r) = \langle \Delta\sigma_n \Delta\sigma_m \rangle$  der Fluktuationen betrachtet, wobei  $r = |n-m|$  den Abstand zwischen den Spins auf den Gitterplätzen  $n$  und  $m$  bezeichnet. Solange die Korrelationslänge  $\xi$  endlich ist, fällt die Korrelationsfunktion für große Abstände  $r$  exponentiell ab:

$$C(r) \propto e^{-r/\xi}, \quad T \neq T_c$$

Direkt am kritischen Punkt ist  $\xi$  jedoch unendlich groß. Dann fällt die Korrelationsfunktion sehr viel langsamer ab, nämlich gemäß

$$C(r) \propto r^{-(d-2+\eta)}, \quad T = T_c, \quad (2)$$

wobei  $d$  die Raumdimension und  $\eta$  einen weiteren kritischen Exponenten bedeuten. Dieses Verhalten der Korrelationsfunktion erklärt die Divergenz der Suszeptibilität  $\chi$  am kritischen Punkt, denn es gilt

$$\chi = \int d^d r C(r)$$

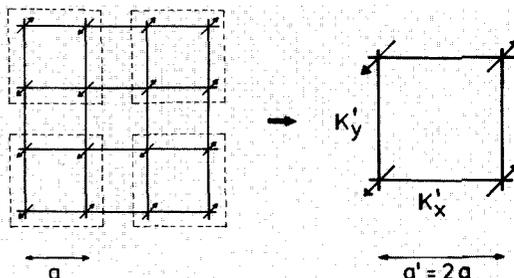
(einfachheitshalber wurde die Summe über diskrete Gitterpunkte durch ein  $d$ -dimensionales Raumintegral ersetzt). Am kritischen Punkt liefert dieses Integral einen unendlich großen Wert, weil  $C(r)$  für große Abstände zu langsam abfällt.

Die Korrelationsfunktion hat für  $T = T_c$  eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft: Wenn man die Längenskala um den Faktor  $b$  und die Skala für die Spinfluktuationen  $\Delta\sigma_i$  um den Faktor  $b^{-w}$ ,  $w = d-2+\eta$  vergrößert, dann bleibt die Korrelationsfunktion (2) unverändert:

$$b^w C(r/b) = C(r); \quad T = T_c.$$

Das ist der formale Ausdruck für die *Skaleninvarianz* am kritischen Punkt, die oben anschaulich beschrieben wurde (genau genommen gilt diese Invarianz nur asymptotisch für Abstände  $r \gg$  Gitterkonstante). Die Korrelationsfunktion ist durch den speziellen Mittelwert  $\langle \Delta\sigma_n \Delta\sigma_m \rangle$  der Spinfluktuationen gegeben. Alle übrigen Mittelwerte dieser Fluktuationen haben jedoch ganz ähnli-

Bild 4: Bei der Blockspin-Transformation mit  $b = 2$  werden vier Spins zu einem Blockspin zusammengefaßt. Die Kopplungen zwischen den Blockspins sind  $K'_x$  und  $K'_y$ .



che Invarianzeigenschaften. *Der kritische Punkt ist demnach durch eine zusätzliche Symmetrie, nämlich durch die Invarianz der Mittelwerte gegenüber Skalentransformationen, ausgezeichnet.*

#### 4. Ideen der Renormierung

Im letzten Abschnitt wurde ein mikroskopisches Bild entworfen, das die Anomalien am kritischen Punkt qualitativ erklärt. Eine *quantitative* Theorie muß allerdings noch zwei fundamentale Probleme lösen: 1. Wie kann man die kritischen Exponenten ( $\beta, \gamma, \nu, \eta, \dots$ ) praktisch berechnen? 2. Wie kann man die experimentell beobachtete Universalität dieser Exponenten erklären? Die klassische Theorie der kontinuierlichen Phasenübergänge wurde 1937 von L. Landau entwickelt. Ihre Vorhersagen für die Exponenten weichen allerdings erheblich von den experimentellen Werten ab. Einige Jahre später (1944) konnte L. Onsager die exakten Exponenten für das 2-dimensionale Ising-Modell berechnen. Man hat lange versucht, weitere exakte Lösungen für andere Modellsysteme zu finden, was bisher aber nur für ganz spezielle 2-dimensionale Modelle gelang. In den letzten Jahren ist nun mit der Renormierung ein völlig neuer Zugang gefunden worden. Die Renormierung liefert *sowohl eine Erklärung für die Universalität als auch praktische Methoden zur Berechnung der kritischen Exponenten.*

Die Renormierung ist auf die besonderen Verhältnisse am kritischen Punkt zugeschnitten. Im letzten Abschnitt wurde deutlich, daß der kritische Punkt durch Invarianz gegenüber Skalentransformationen ausgezeichnet ist. Diese Transformationen bilden deshalb den Ausgangspunkt für die Renormierung. Im folgenden wird sie am Beispiel des Ising-Modells erläutert, für das verschiedene R-Verfahren (R = Renormierung) entwickelt worden sind. Dabei sollen zunächst die gemeinsamen Ideen beschrieben werden, die allen diesen Verfahren zugrunde liegen und auf L. P. Kadanoff und K. G. Wilson zurückgehen.

Jedes R-Verfahren für das Ising-Modell liefert eine Transformation des Boltz-

mann-Faktors:  $W\{\sigma\} \rightarrow W'\{\sigma\}$ . Diese Abbildung läßt sich beliebig oft iterieren:  $W'\{\sigma\} \rightarrow W''\{\sigma\} \rightarrow \dots$  In jedem Iterationsschritt wird die Längenskala geändert, also z. B. die Gitterkonstante  $a$ :

$$a \rightarrow a' = b a \quad (T 1)$$

(Bild 4). Dabei ist  $b > 1$  der Skalierungsfaktor der Renormierung. Die Änderung der Längenskala wird dadurch erreicht, daß man „Freiheitsgrade ausdünn“t. Dafür gibt es mehrere Methoden; sie werden in Abschnitt 5 beschrieben. Besonders anschaulich ist die Blockspin-Transformation (Bild 4, vgl. auch [5]), bei der man in jedem R-Schritt mehrere Spins zu einem Blockspin zusammenfaßt.

Das „Ausdünnen von Freiheitsgraden“ bewirkt nicht nur eine Änderung der Längenskala, sondern auch eine Änderung der Parameter der Wechselwirkung. Für das 2-dimensionale Ising-Modell (Bild 3) ändern sich die beiden reduzierten Spin-Kopplungen  $K_x, K_y$ :

$$\begin{aligned} K_x &\rightarrow K'_x = R_x(K_x, K_y) \\ K_y &\rightarrow K'_y = R_y(K_x, K_y) \end{aligned} \quad (T 2)$$

(In der Blockspin-Transformation sind  $K'_x, K'_y$  die Kopplungen zwischen den Blockspins, siehe Bild 4). Die R-Transformation wird so konstruiert, daß sich die Korrelationslänge  $\xi$  bei jedem R-Schritt um den Faktor  $b$  verkleinert:

$$\xi(K'_x, K'_y) = \frac{1}{b} \xi(K_x, K_y) \quad (3)$$

Die Wirkung der Transformation (T2) läßt sich anschaulich im Parameterraum  $(K_x, K_y)$  darstellen (Bild 5-7). Dabei muß man zunächst beachten, daß dieser Parameterraum eine ganze Klasse von verschiedenen Ising-Modellen enthält, die durch verschiedene Austauschkopplungen  $J_x$  und  $J_y$  definiert sind. Da die reduzierten Kopplungen  $K_x$  und  $K_y$  umgekehrt proportional zur Temperatur sind, durchlaufen sie bei einer Änderung der Temperatur von  $T = 0$  bis  $T = \infty$  alle Werte von  $\infty$  bis 0. Einer Änderung der Temperatur entspricht demnach ein Weg im  $(K_x, K_y)$ -Raum. Zwei derartige Wege sind im Bild 5 eingezeichnet. Der obere entspricht z. B. einem Ising-Modell (Ferromagne-

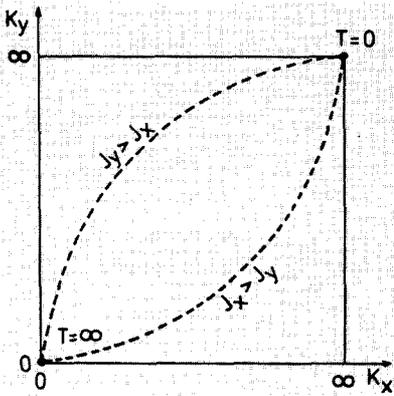


Bild 5: Zwei Temperaturwege (gestrichelte Kurven) im  $(K_x, K_y)$ -Raum. Der Punkt  $(K_x, K_y) = (0, 0)$  entspricht der Temperatur  $T = \infty$ , der Punkt  $(\infty, \infty)$  der Temperatur  $T = 0$ .

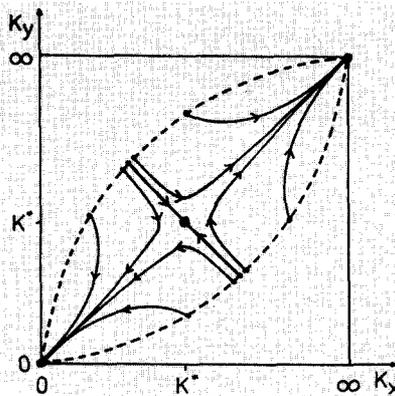


Bild 6: Einige Renormierungs-Trajektorien, deren Startpunkte auf den Temperaturwegen (gestrichelt) von Bild 5 liegen. Die Trajektorien enden in einem der drei Fixpunkte.

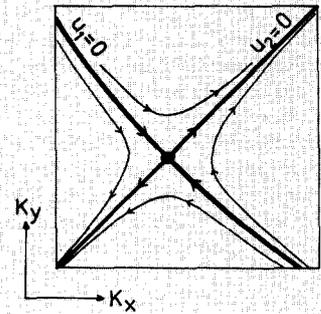


Bild 7: Angepaßte Koordinaten = Skalenfelder  $u_1, u_2$  für den kritischen Fixpunkt mit  $(K_x, K_y) = (K^*, K^*)$ . Der Einzugsbereich ist durch  $u_i = 0$  gegeben.

ten) mit Austauschkopplungen  $J_y > J_x$ , in dem also die Spins in  $y$ -Richtung stärker gekoppelt sind als in  $x$ -Richtung.

Betrachten wir zunächst ein solches Ising-Modell mit  $J_y > J_x$ . Jeder Punkt des Temperaturweges bildet einen Startpunkt für die Renormierung. Wenn man die  $R$ -Transformation ( $T_2$ ) mehrmals hintereinander auf einen solchen Startpunkt anwendet, dann erhält man eine Folge von Bildpunkten im  $(K_x, K_y)$ -Raum. Diese Punkte bilden eine  $R$ -Trajektorie. In Bild 6 sind mehrere derartige Trajektorien eingezeichnet. Je nach Startpunkt führen die  $R$ -Trajektorien zu verschiedenen „Endpunkten“. Diese sind zugleich *Fixpunkte* von ( $T_2$ ), denn dort gilt

$$K'_x = R_x(K_x, K_y) = K_x$$

$$K'_y = R_y(K_x, K_y) = K_y.$$

An einem Fixpunkt erhält man für die Korrelationslänge wegen (3):

$$\xi(K_x, K_y) = \frac{1}{b} \xi(K_x, K_y).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn  $\xi$  am Fixpunkt verschwindet oder unendlich groß ist.

Wie man in Bild 6 erkennt, gibt es in unserem Beispiel drei verschiedene Fixpunkte, nämlich  $(K_x, K_y) = (0, 0), (K^*, K^*)$  und  $(\infty, \infty)$ . Der Fixpunkt  $(0, 0)$  beschreibt den völlig ungeordneten Zustand der Spins bei der Temperatur  $T = \infty$ ; der Fixpunkt  $(\infty, \infty)$  repräsentiert den völlig geordneten Zustand bei  $T = 0$ . In beiden Fällen ist die Korrelationslänge  $\xi = 0$ . Der Fixpunkt  $(K^*, K^*)$  charakterisiert dagegen den kontinuierlichen Phasenübergang mit  $\xi = \infty$ .

Zu jedem Paar von Austauschkopplungen  $J_x, J_y$  gehört ein bestimmter Temperaturweg im  $(K_x, K_y)$ -Raum. Auf jedem derartigen Weg gibt es genau einen Startpunkt, der unter der Renormierung auf

den kritischen Fixpunkt  $(K^*, K^*)$  abgebildet wird. Dieser Startpunkt entspricht dem kritischen Punkt des Ising-Modells mit den Austauschkopplungen  $J_x, J_y$ . Er legt die kritische Temperatur  $T_c = T_c(J_x, J_y)$  fest, die von den Austauschkopplungen abhängt. Die Menge dieser speziellen Startpunkte für verschiedene Paare  $J_x, J_y$  bildet den Einzugsbereich des Fixpunktes.

Was passiert mit Startpunkten, die zu Temperaturen  $T \neq T_c$ , aber  $T$  nahe bei  $T_c$  gehören? Wie aus Bild 6 ersichtlich, schmiegen sich die zugehörigen  $R$ -Trajektorien an den Einzugsbereich von  $(K^*, K^*)$  an, bis sie die unmittelbare Umgebung dieses Fixpunktes erreicht haben. Das kritische Verhalten für  $T \rightarrow T_c$  wird deshalb durch die Eigenschaft der  $R$ -Transformation ( $T_2$ ) in der Nähe des kritischen Fixpunktes  $(K^*, K^*)$  beschrieben. Es ist zweckmäßig, neue Koordinaten  $u_1, u_2$  einzuführen, so daß dieser Fixpunkt bei  $u_1 = u_2 = 0$  liegt und der Einzugsbereich durch  $u_i = 0$  gegeben ist (Bild 7). Man kann diese Koordinaten so wählen, daß sie unter der Renormierung das einfache Transformationsverhalten

$$u'_i = b^{y_i} u_i; \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

haben. Diese Koordinaten  $u_i$  werden als *Skalenfelder* bezeichnet, die  $y_i$  als *Skalenindizes*. (Diese Konzepte stammen von F. J. Wegner, vgl. [7]). Das Vorzeichen eines Skalenindex bestimmt, wie sich das zugehörige Skalenfeld unter der Renormierung verhält. Falls der Skalenindex  $y_i$  positiv ist, wächst das Skalenfeld  $u_i$  unter der  $R$ -Transformation (4) an, d. h. es wird vom Fixpunkt abgestoßen. Ein solches Skalenfeld heißt *relevant*. Falls der Skalenindex  $y_i$  negativ ist, geht  $u_i$  unter (4) gegen Null, d. h. das Skalenfeld wird vom Fixpunkt angezogen. Es wird dann als *irrelevant* bezeichnet (falls  $y_i = 0$  gilt, folgt  $u'_i = u_i$ , und das Skalenfeld ist marginal).

An dem kritischen Fixpunkt in Bild 6 und Bild 7 gibt es ein relevantes und ein irrelevantes Skalenfeld. Das relevante Feld  $u_1$  ist proportional zur reduzierten Temperatur  $(T - T_c)/T_c$ . Wenn man in (3) die Kopplungen  $K_x, K_y$  durch die beiden Skalenfelder  $u_1, u_2$  ausdrückt und den Skalierungsfaktor  $b$  geeignet wählt, dann erhält man

$$\xi(K_x, K_y) \propto |u_1|^{-1/y_1} \propto |T - T_c|^{-1/y_1}.$$

Daraus ergibt sich der Zusammenhang  $\nu = 1/y_1$  zwischen dem kritischen Exponenten der Korrelationslänge und dem Skalenindex  $y_1$ . Die Skalenindizes der relevanten Skalenfelder bestimmen demnach die kritischen Exponenten. Beim Ising-Modell gibt es zwei relevante Skalenfelder: Das eine ist proportional zur reduzierten Temperatur (wie oben erläutert), das andere ist mit dem äußeren Magnetfeld verknüpft (der zugehörige Skalenindex  $y_h$  bestimmt den Exponenten  $\eta$ :  $\eta = d + 2 - 2y_h$ ). Alle anderen Skalenfelder sind irrelevant. Die Anwesenheit der irrelevanten Skalenfelder spiegelt die Universalität des kritischen Verhaltens wider. In unserem einfachen Beispiel bedeutet das: Die kritischen Exponenten sind entlang des gesamten Einzugsbereiches des kritischen Fixpunktes ( $u_i = 0$ ) gleich, d. h. sie hängen, im Gegensatz zur kritischen Temperatur  $T_c$ , nicht von den Austauschkopplungen  $J_x$  und  $J_y$  ab. Alle 2-dimensionalen Ising-Modelle mit beliebigen Austauschkopplungen  $J_x$  und  $J_y$  gehören deshalb zu derselben Universalitätsklasse.

Fassen wir die Denkweise der Renormierung noch einmal zusammen:

1. In der Renormierung wird nicht ein einzelnes Modellsystem betrachtet, sondern viele verschiedene Modelle, die sich in den Parametern der mikroskopischen Wechselwirkung unterscheiden. Dabei hat jedes Modell einen eigenen kritischen Punkt;
2. Falls die kritischen Punkte verschiedener Modelle unter der Renormie-

rung auf denselben Fixpunkt abgebildet werden, gehören sie zu derselben Universalitätsklasse; 3. Die relevanten Skalenfelder am Fixpunkt bestimmen die kritischen Exponenten dieser Universalitätsklasse.

**5. Strategien der Renormierung**

Wie lassen sich die Ideen der Renormierung praktisch verwirklichen? Dazu sind Rechenmethoden nötig, mit denen man sukzessive „Freiheitsgrade ausdünnen“ kann. Für das Ising-Modell sind mehrere derartige Methoden entwickelt worden. Sie lassen sich in zwei Gruppen einteilen, die im folgenden beschrieben werden.

**5.1 Ortsraum-Renormierung [8]**

Die direkteste Methode, die Gitterkonstante gemäß (T1) zu vergrößern, besteht darin, daß man in der Zustandssumme (1) über einen Teil der Spins summiert. Dabei stößt man jedoch auf eine Schwierigkeit, die bei fast allen Varianten der Ortsraum-Renormierung auftritt: Durch die exakte Aussummation einzelner Spins werden zusätzliche Typen von Spinkopplungen erzeugt, die im ursprünglichen Modell nicht vorkommen. Diese Schwierigkeit wird noch dadurch vergrößert, daß bei jedem weiteren Iterationsschritt immer wieder neue Typen von Spinkopplungen hinzukommen.

Für eine exakte Ortsraum-Renormierung des Ising-Modells muß man demnach unendlich viele Kopplungsparameter berücksichtigen. Die R-Transformation (T2) wirkt dann in einem unendlich-dimensionalen Parameterraum. An dem kritischen Fixpunkt in diesem Raum gibt es unendlich viele Skalenfelder. Eine exakte Ortsraum-Renormierung stößt deshalb auf große technische Schwierigkeiten. Andererseits werden zur Berechnung der kritischen Exponenten nur die beiden relevanten Skalenfelder benötigt, die mit der reduzierten Temperatur und dem Magnetfeld verknüpft sind (vgl. Abschnitt 4). Die Strategie der Ortsraum-Renormierung besteht nun darin, genäherte Transformationen für diese beiden Skalenfelder zu konstruieren. Die Güte dieser Näherungen läßt sich abschätzen, indem man die R-Methoden an den wenigen Modellen testet, deren kritische Exponenten exakt bekannt sind.

Eine Ortsraum-Renormierung, die sehr gute Werte für die kritischen Exponenten liefert, ist die Blockspin-Renormierung von Th. Niemeijer und J. M. J. van Leeuwen [7]. Sie ist in Bild 4 schematisch dargestellt und wird in [5] sehr anschaulich beschrieben. Es gibt eine ganze Reihe anderer Methoden der Ortsraum-Renormierung.

Die einfachste stammt von A. A. Migdal und L. P. Kadanoff [8]. Diese Renormierung ist für die Raumdimension  $d = 1$  exakt. In  $d > 1$  erhält man für  $K = K_x = K_y$  und Skalierungsfaktor  $b$  die Abbildung (T2) in der Gestalt

$$\tanh(K') = [\tanh(b^{d-1}K)]^b.$$

Diese Transformation liefert einen kritischen Fixpunkt für Raumdimensionen  $d > 1$ . Man beachte, daß  $d$  nur als Parameter eingeht, und zwar in der Form  $\bar{\varepsilon} = (d-1)$ . Die Raumdimension  $d$  kann deshalb formal wie eine kontinuierliche Variable behandelt werden. Dann ist es möglich, einen kleinen Wert für  $\bar{\varepsilon}$  zu wählen und physikalische Größen nach diesem kleinen Parameter zu entwickeln. Z. B. erhält man für den kritischen Exponenten  $\nu$  der Korrelationslänge den Ausdruck  $\nu = 1/\bar{\varepsilon}$  in der niedrigsten Ordnung in  $\bar{\varepsilon}$ . (Diese  $\bar{\varepsilon}$ -Entwicklung läßt sich im Rahmen des feldtheoretischen „Tröpfchen“-Modells für Spinfluktuationen systematisch fortsetzen [9]).

**5.2 Feldtheoretische Renormierung**

Bei diesen R-Verfahren betrachtet man ein feldtheoretisches Ising-Modell [2, 10, 11]. Die Spinvariablen  $\sigma_i = \pm 1$  auf dem diskreten Gitter werden durch ein Spinfeld  $\sigma(x)$  ersetzt.  $\sigma(x)$  ist für jeden Punkt des  $d$ -dimensionalen Raums definiert und nimmt alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  an. Die Rolle der Gitterkonstanten  $a$  übernimmt jetzt der Abschneideparameter (Cutoff)  $\Lambda$ . Dieser beschränkt die Wellenvektoren, die in den Fourier-Komponenten von  $\sigma(x)$  vorkommen:

$$\sigma(x) = \int_{|k| < \Lambda} d^d k e^{ikx} \sigma(k) \tag{5}$$

Damit ist gewährleistet, daß es keine Spinfluktuationen gibt, deren Wellenlänge kleiner als  $1/\Lambda$  ( $\approx$  Gitterkonstante  $a$ ) ist. Die Konfigurationsenergie des feldtheoretischen Ising-Modells hat die Form

$$E\{\sigma\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\sigma)^2 + V(\sigma) \right\}$$

Die „Kopplungen“ dieses Modells sind durch die Entwicklungskoeffizienten  $v_n$  der Funktion  $V(\sigma)$  gegeben:

$$V(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sigma^n.$$

Die erste R-Strategie für diese Feldtheorie stammt von K. G. Wilson [2]. Einer Vergrößerung (T1) der Gitterkonstanten entspricht jetzt eine Verkleinerung des Cutoffs:  $\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda/b$ . Diese Transformation von  $\Lambda$  wird erreicht, indem man in der Zustandssumme alle Fourier-Komponenten  $\sigma(k)$  in (5) mit  $\Lambda/b < |k| < \Lambda$  aussummiert. Dadurch

wird eine R-Transformation (T2) im unendlich-dimensionalen Raum der Funktionen  $V(\sigma)$  erzeugt. Ein „Fixpunkt“ in diesem Raum ist durch eine Fixpunktfunktion  $V^*(\sigma)$  gegeben, die sich numerisch bestimmen läßt [2]. An diesem Fixpunkt gibt es wieder zwei relevante Skalenfelder, die mit der reduzierten Temperatur bzw. mit dem Magnetfeld verknüpft sind.

Die R-Transformation im Funktionenraum wird besonders einfach, wenn man mit  $V(\sigma) = r\sigma^2 + g\sigma^4$  startet und annimmt, daß  $g$  klein ist. Dann gilt [10]

$$r' = b^2 \left( r + 3 \frac{g}{1+r} - 9g^2 \right) \tag{6}$$

$$g' = b^{4-d} (g - 9g^2)$$

d. h. die Renormierung wirkt in dem 2-dimensionalen  $(r, g)$ -Unterraum des unendlich-dimensionalen Funktionenraums. In die Abbildung (6) geht die Raumdimension  $d$  wieder nur als Parameter ein, und zwar diesmal in der Form  $\varepsilon = (4-d)$ . Wenn man  $\varepsilon$  formal als kleinen Entwicklungsparameter auffaßt, dann erhält man aus (6) den kritischen Exponenten

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

(der Term der  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  wird durch (6) nicht richtig wiedergegeben).

Es ist möglich, diese  $\varepsilon$ -Entwicklung systematisch fortzusetzen [7]. Im Rahmen dieser Entwicklung reicht es aus, die Renormierung auf die 2-parametrische Feldtheorie mit  $V(\sigma) = r\sigma^2 + g\sigma^4$  anzuwenden. Der große praktische Vorteil dieser Darstellung des Ising-Modells besteht darin, daß man dafür Methoden aus der Quantenfeldtheorie verwenden kann (Feynman-Diagramme, Dimensionsregularisierung, ...) [11]. Mit diesen R-Methoden sind die genauesten Werte für die kritischen Exponenten des 3-dimensionalen Ising-Modells berechnet worden, z. B.  $\nu = 0,630$  und  $\eta = 0,031$  [12].

**6. Erfolge der Renormierung**

Bisher wurden die Ideen und Strategien der Renormierung am kontinuierlichen Phasenübergang im Ising-Modell erläutert. Sie sind jedoch auf viele andere kritische Phänomene angewendet worden. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele kurz beschrieben.

**6.1 Kontinuierliche Phasenübergänge [3, 4]**

Der Phasenübergang im Ising-Modell ist mit einer „spontanen Symmetriebrechung“ verknüpft. Was bedeutet das? Für

Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  verschwindet der Ordnungsparameter (= Magnetisierung  $M$ , siehe Bild 2 b). Deshalb bleibt der Ordnungsparameter unverändert, wenn man alle Spins umklappt (alle  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ ). Unterhalb von  $T_c$  ist der Ordnungsparameter dagegen von Null verschieden. Unter der Umklapp-Operation wird aus einem Zustand, bei dem die Spins im Mittel „rauf“ zeigen (Magnetisierung  $M > 0$ ), ein Zustand, bei dem die Spins im Mittel „runter“ zeigen ( $M < 0$ ). Die „rauf-runter“-Symmetrie der ungeordneten Phase ( $M = 0$ ) gilt demnach nicht für die geordneten Phasen ( $M > 0$  bzw.  $M < 0$ ).

Die meisten kontinuierlichen Phasenübergänge sind mit einer ähnlichen Symmetriebrechung verknüpft. In den letzten Jahren ist es mittels Renormierung gelungen, solche Phasenübergänge systematisch in Universalitätsklassen einzuteilen. Innerhalb einer Klasse wird das kritische Verhalten durch dieselben kritischen Exponenten beschrieben. Die Renormierung hat gezeigt, daß die kritischen Exponenten im Ising-Modell für  $1 < d \leq 4$  von der Raumdimension  $d$  abhängen (Abschnitt 5). Für jedes solche  $d$  repräsentiert das Ising-Modell demnach eine Universalitätsklasse. (Für  $d > 4$  hängen die kritischen Exponenten nicht von  $d$  ab, für  $d \leq 1$  gibt es keinen Phasenübergang.) In der realen Welt kommen natürlich nur 2- oder 3-dimensionale Systeme vor. Für  $d = 2$  gehören Magnete mit Schichtstruktur (wie  $K_2NiF_4$ ) und absorbierte Gas-schichten (wie  $He^4$  auf mit Kr belegtem Graphit) zur Ising-Klasse. Für  $d = 3$  gehören binäre Legierungen (wie CuZn) und alle kritischen Flüssig/Gas-Übergänge dazu.

Die Renormierung hat außerdem gezeigt, daß die Universalitätsklassen von der spontan gebrochenen Symmetrie abhängen. Im Ising-Modell ist das die diskrete „rauf-runter“-Symmetrie, die darauf beruht, daß jeder Spin zwei diskrete Zustände annehmen kann. Viele Phasenübergänge, die in der Natur vorkommen, werden allerdings durch Modelle beschrieben, bei denen jeder Spin mehr als zwei Einstellmöglichkeiten hat. Im Potts-Modell [4, 8] kann jeder Spin  $q$  diskrete Werte annehmen, im  $n$ -Vektor-Modell [10–12] die kontinuierlichen Werte auf einer  $n$ -dimensionalen Kugel. Zu jedem Wert von  $q$  und zu jedem Wert von  $n$  gehört eine andere Symmetrie und damit auch eine andere Universalitätsklasse (für große  $q$  gibt es allerdings keine kritischen Exponenten, weil der Phasenübergang dann diskontinuierlich ist).

Diese Einteilung in Universalitätsklassen gilt zunächst, falls man sich auf zeit-unabhängige (statische) Eigenschaften des Phasenübergangs beschränkt. Wenn man

zeitabhängige (dynamische) Eigenschaften hinzunimmt, dann spaltet jede statische Universalitätsklasse in mehrere dynamische auf [13].

## 6.2 Kosterlitz-Thouless-Übergang [14]

Im  $n$ -Vektor-Modell treten für  $n \geq 2$  Spinwellen auf. In der Raumdimension  $d = 2$  zerstören diese Spinwellen die langreichweitige Ordnung, d. h. die Magnetisierung verschwindet für alle Temperaturen. Es kann deshalb in diesen Systemen keinen Phasenübergang mit spontaner Symmetriebrechung geben (Mermin-Wagner-Theorem). Trotzdem tritt in dem 2-komponentigen Modell für  $d = 2$  der sog. Kosterlitz-Thouless-Übergang auf. Er ist dadurch charakterisiert, daß sich die Korrelationsfunktion  $C(r)$  oberhalb und unterhalb von  $T_c$  als Funktion des Abstands  $r$  verschieden verhält: Für  $T < T_c$  gilt das Potenzgesetz  $C(r) \propto r^{-\bar{\eta}(T)}$ , für  $T > T_c$  zerfallen die Korrelationen exponentiell. Dabei hängt der Exponent  $\bar{\eta}(T)$  kontinuierlich von der Temperatur  $T < T_c$  ab. Die Renormierung liefert nämlich für  $T < T_c$  eine ganze Linie von Fixpunkten.

## 6.3 Anderson-Lokalisierung [15]

Im periodischen Potential eines idealen Kristalls sind die Eigenzustände eines Elektrons über den ganzen Kristall ausgedehnt (Bloch-Theorem). In einem Potential, das sich von Gitterplatz zu Gitterplatz zufällig ändert, kann dagegen eine kritische Energie  $E_c$  (die Mobilitätskante) auftreten, so daß Elektronenzustände mit Energien  $E < E_c$  lokalisiert und solche mit Energien  $E > E_c$  ausgedehnt sind. Die Existenz und die Eigenschaften der Mobilitätskante sind mit R-Methoden untersucht worden. Man findet, daß die Mobilitätskante  $E_c$  nur für Raumdimensionen  $d > 2$  auftritt. In der Nähe von  $E_c$  gelten Skalengesetze: Z. B. divergiert die Ausdehnung  $\xi$  der lokalisierten Zustände wie  $\xi \propto |E - E_c|^{-\bar{\nu}}$ , und die Gleichstromleitfähigkeit  $\sigma$  verschwindet wie  $\sigma \propto |E - E_c|^s$ , mit  $s = (d-2)\bar{\nu}$ . Es gibt verschiedene Universalitätsklassen, je nach der Art der Unordnung des Zufallspotentials.

## 6.4 Nichtlineare Dynamik [16]

Die einfachste nichtlineare Dynamik wird durch eine 1-dimensionale Abbildung der Form  $x_t \rightarrow x_{t+1} = f_\mu(x_t)$  erzeugt. Dabei ist  $f_\mu(x)$  eine Funktion, die von  $\mu$  parametrisch abhängt. Für bestimmte Werte von  $\mu$  durchläuft  $x_t$  eine periodische Bahn mit der Periode  $T$ . Bei Variation des Parameters  $\mu$  findet man eine unendliche Folge von  $\mu$ -Werten  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , an denen *Periodenverdopplung*

auftritt, d. h.  $T \rightarrow 2T \rightarrow 2^2T \rightarrow \dots$ . Diese Folge der  $\mu$ -Werte hat einen Häufungspunkt

$$\mu_c = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i.$$

Für große  $i$  gilt:  $\mu_i - \mu_c \propto \delta^{-i}$ . M. J. Feigenbaum hat 1978 gefunden, daß  $\delta$  eine *universelle* Konstante ist, d. h. sie hat für ganze Funktionenklassen unabhängig von der speziellen Form der Funktion  $f_\mu$  denselben Wert. Die Konstante  $\delta$  läßt sich mittels Renormierung berechnen. Die R-Transformation wirkt in dem Raum der Funktionen  $f_\mu$ . Es gibt eine Fixpunktfunktion und ein relevantes Skalenfeld an diesem Fixpunkt. Der Skalenindex, der zu diesem Skalenfeld gehört, bestimmt die universelle irrationale Konstante  $\delta = 4,669$ . Periodenverdopplung wird in verschiedenen physikalischen Systemen beobachtet (z. B. Bénard-Instabilität, Schall in flüssigem He). Diese Experimente bestätigen die Universalität von  $\delta$ .

## 6.5 Weitere Beispiele:

Kontinuierliche Phasenübergänge in halb-unendlichen Systemen [17]; Konformation von Polymerketten [18]; Kondo-Problem [19]; Langzeitverhalten von hydrodynamischen Korrelationen [20]; . . .

## 7. Ausblick

Die Beispiele des vorangehenden Abschnitts zeigen, daß die Renormierung auf ganz verschiedenartige Probleme erfolgreich angewendet worden ist. Sie wird wohl auch in Zukunft eine wichtige Rolle beim Studium kritischer Phänomene spielen. Bisher ungelöste Probleme sind: der Einfluß von Unordnung auf kontin. Phasenübergänge (z. B. Ising-Modell mit Zufallsfeld); das kritische Verhalten von Phasengrenzflächen; der Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auf die Anderson-Lokalisierung; . . . Schließlich sollte die Renormierung auch bei dem Problem der *vollausgebildeten Turbulenz* weiterhelfen. Es ist seit langem bekannt, daß die Geschwindigkeitsfluktuationen einer Strömung bei großen Reynolds-Zahlen universelle Eigenschaften haben. In der phänomenologischen Theorie der vollausgebildeten Turbulenz [21] faßt man diese Fluktuationen als Kaskade von Wirbelzerfällen auf. Diese Theorie liefert Skalengesetze und Exponenten für verschiedene physikalische Größen [22], experimentell findet man aber systematische Abweichungen von diesen Vorhersagen. Es sollte möglich sein, diese Abweichungen mittels Renormierung zu erklären. Bisher ist es jedoch nicht gelungen, eine erfolgreiche R-Strategie für dieses Problem zu entwickeln [23]. Das macht noch einmal deutlich, daß die Renormie-

rung vor allem eine neue Denkweise ist, aber keine vorgefertigten Rezepte liefert: „*One cannot write a renormalization cookbook.*“ (K. G. Wilson, 1975).

#### Literatur

- [ 1 ] Phys. Bl. **38**, 352 (1982); Phys. Today **35**, 17 (Dec. 1982); Science **218**, 763 (1982).
- [ 2 ] Wilson, K. G., Phys. Rev. **B4**, 3174 und 3184 (1971).
- [ 3 ] Stierstadt, K., Phys. Bl. **30**, 9 und 106 (1974).
- [ 4 ] Gebhardt, W., u. U. Krey: Phasenübergänge und kritische Phänomene, Vieweg, Braunschweig 1980.
- [ 5 ] Wilson, K. G., Spektr. Wiss., Okt. 1979, S. 66.
- [ 6 ] Wallace, D. J., u. R. K. P. Zia, Rep. Prog. Phys. **41**, 1 (1978).
- [ 7 ] Domb, C., u. M. S. Green (Hrsg.): Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 6, Academic Press, London 1976.
- [ 8 ] Burkhardt, T. W., u. J. M. J. van Leeuwen (Hrsg.): Real Space Renormalization, Springer, Heidelberg 1982.
- [ 9 ] Wallace, D. J., in: Proc. Les Houches 1982, North-Holland (erscheint demnächst).
- [10] Wilson, K. G., u. M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
- [11] Amit, D. J.: Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena, Mc Graw Hill, New York 1978.
- [12] Le Guillou, J. C., u. J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **B21**, 3976 (1980).
- [13] Hohenberg, P. C., u. B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [14] Young, A. P., in T. Riste (Hrsg.): Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems, Plenum Press, New York 1980; S. 271.
- [15] Wegner, F. J., in Y. Nagaoka u. H. Fukuyama (Hrsg.): Anderson localization, Springer, Heidelberg 1982, S. 8.
- [16] Eilenberger, G., u. H. Müller-Krumbhaar (Hrsg.): Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Jülich 1983.
- [17] Binder, K., in C. Domb u. J. L. Lebowitz (Hrsg.): Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 7, Academic Press (erscheint demnächst).
- [18] de Gennes, P. G.: Scaling Concepts in Polymer Physics, Cornell University Press, London 1979.
- [19] Wilson, K. G., Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [20] Forster, D., D. R. Nelson u. M. J. Stephen, Phys. Rev. **A16**, 732 (1977).
- [21] Kolmogorov, A. N., (1941); übersetzt in Sov. Phys. Usp. **10**, 734 (1968); C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik **124**, 614 (1948).
- [22] Rose, H. A., u. P. L. Sulem, J. Phys. (Paris) **39**, 442 (1978).
- [23] Kraichnan, R. H., Phys. Rev. **A25**, 3281 (1982).